Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Fie $CD \perp AB$, $D \in AB$. În ΔBCD dreptunghic, $m(\angle B) = 30^0$, deci $BC = 2 \cdot x$, unde $x = CD$. Din $m(\angle BCD) = 60^0$ şi $m(\angle ACB) = 15^0$, rezultă că $m(\angle ACD) = 45^0$, deci triunghiul ADC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $AC = x \cdot \sqrt{2}$. Prin urmare, $\frac{BC}{AC} = \frac{2 \cdot x}{x \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

b).Conform punctului **a)**, rezultă că $\frac{MC}{AC} = \frac{x}{x \cdot \sqrt{2}} = \frac{AC}{BC}$, deci $\Delta ACM \sim \Delta BCA$ (*L.U.L.*), aşadar $\frac{MC}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{AB}$, de unde $AM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Problema 2.

Soluţie. a) Avem succesiv, $|x-1|+|x-2013| = |x-1|+|2013-x| \geq |x-1+2013-x| = 2012$, iar egalitatea are loc atunci când $x-1$ şi $2013-x$ au acelaşi semn, adică $x \in [1\,;\,2013]$. Analog rezultă inegalităţile: $|x-5|+|x-2009| \geq 2004$, $|x-9|+|x-2005| \geq 1996$,..., $|x-1005|+|x-1009| \geq 4$, de unde, prin adunare rezultă că

$$|x-1|+|x-5|+|x-9|+|x-13|+...|x-2013| \geq 4+12+20+...+2012 = \frac{2016 \cdot 252}{2} = 504^2.$$

Egalitatea are loc atunci când $x \in [1;2013] \cap [5;2009] \cap ... \cap [1005\,;1009]$, de unde $x \in [1005\,;\,1009]$.

b) Pentru $n = 0$, $x = 112896 = 336^2$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = 112 \cdot 10^{n+3} + 896 = 112 \cdot \left(10^{n+3} + 8\right) = 4^2 \cdot 7 \cdot \left(10^{n+3} + 8\right)$, deci $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, de unde $u\left(7 \cdot k^2\right) = 8$, adică $u\left(k^2\right) = 4$, deci $u(k) \in \{2\,,\,8\}$.

Cazul 1.

$u(k) = 2$, deci $k = 10 \cdot a + 2$, $a \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot (10 \cdot a + 2)^2 = 700 \cdot a^2 + 280 \cdot a + 28$, deci $10^{n+3} = 700 \cdot a^2 + 280 \cdot a + 20$, de unde $10^{n+2} = 70 \cdot a^2 + 28 \cdot a + 2 \vdots 10^3$, adică $2 \cdot \left(35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1\right) \vdots 2^3 \cdot 5^3$, de unde rezultă că $35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1 \vdots 4$. Se observă că $a = 2 \cdot b + 1$, $b \in \mathbb{N}$ şi va rezulta că $35 \cdot a^2 + 14 \cdot a + 1 = 35 \cdot \left(4 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 1\right) + 14 \cdot (2 \cdot b + 1) + 1 = M_4 + 50 = M_4 + 2$, contradicţie.

Cazul 2.

$u(k) = 8$, deci $k = 10 \cdot a + 8$, $a \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $10^{n+3} + 8 = 7 \cdot (10 \cdot a + 8)^2 = 700 \cdot a^2 + 1120 \cdot a + 448$, deci $10^{n+3} = 700 \cdot a^2 + 1120 \cdot a + 440$, de unde $10^{n+2} = 70 \cdot a^2 + 112 \cdot a + 44 \vdots 10^3$, adică $2 \cdot \left(35 \cdot a^2 + 56 \cdot a + 22\right) \vdots 2^3 \cdot 5^3$, de unde rezultă că $\left(35 \cdot a^2 + 56 \cdot a + 22\right) \vdots 4$, deci $35 \cdot a^2 = M_4 + 2$, adică $a^2 = M_4 + 2$, contadicţie.

Deci $n=0$ este singura soluție a problemei.

Problema 3.

Soluție. a) Fie $2013=n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din ipoteză rezultă că $M_iM_j^2\le 2\cdot n^2$, $M_iM_k^2+M_kM_j^2\ge n^2+n^2=2\cdot n^2$, deci $M_iM_k^2\le M_iM_j^2+M_jM_k^2$, adică cele trei puncte sunt vârfurile unui triunghi ascuțitunghic, cel mult dreptunghic, oricare ar fi indicii distincți i , j , $k\in\{1,2,3,4\}$. Mai mult, rezultă că toate cele 4 puncte sunt vârfurile unui patrulater convex (justificare prin reducere la absurd), cu unghiurile cel mult de măsură 90^0, dar cum suma măsurilor lor este 360^0, rezultă că toate că cele 4 puncte sunt vârfurile unui dreptunghi, fie acesta $M_1M_2M_3M_4$, evident patrulater inscriptibil. Dacă $M_1M_2=a$, $M_2M_3=b$, din $2\cdot n^2=n^2+n^2\le a^2+b^2=M_1M_3^2\le 2\cdot n^2$, rezultă că $a=b$, deci $M_1M_2M_3M_4$ este un pătrat de latură $a=n$, iar raza cercului circumscris este $R=\dfrac{n\cdot\sqrt{2}}{2}=2013\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Bisectoarea$(BD$ intersectează cercul circumscris triunghiului EBC într-un punct M_1 şi din proprietățile unghiului înscris în cerc, rezultă că arcele $\overset{\frown}{M_1E}$ şi $\overset{\frown}{M_1C}$ sunt congruente, deci $[M_1E]\equiv[M_1C]$, aşadar M_1 se află pe mediatoarea segmentului $[EC]$, adică $M=M_1$. Rezultă că patrulaterul $EBCM$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle BCE)=m(\sphericalangle EMB)=m(\sphericalangle DCE)=\dfrac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle ACB)$ (1). Din $ME\,\|\,DF$ rezultă că $m(\sphericalangle EMB)=m(\sphericalangle FDB)$ (corespondente) şi din (1) rezultă că $m(\sphericalangle BCF)=m(\sphericalangle FDB)$, deci patrulaterul $BCDF$ este inscriptibil, şi deoarece $(CF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, rezultă că arcele $\overset{\frown}{BF}$ şi $\overset{\frown}{FD}$ sunt congruente, deci coardele $[BF]$ şi $[FD]$ sunt congruente.